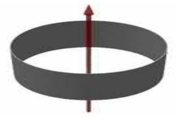
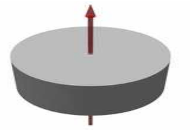
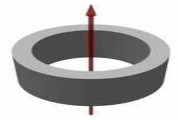
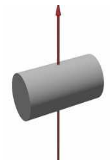
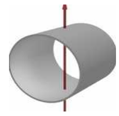
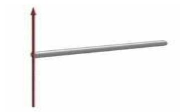
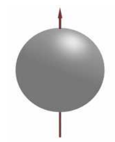
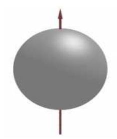
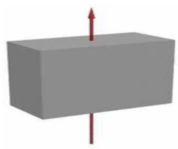
Arbeitsblatt | **_Physik_**
Klasse | Datum | Schoepe

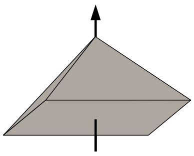
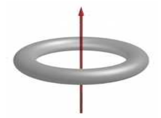
bbscux
KOMPETENT. INNOVATIV. MENSCHLICH.

Beispiele für Trägheitsmomente

Quelle: *http://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitsmoment*

Legende: m *ist die Masse,* r *ist der Radius*

Abbildung	**Beschreibung**	**Trägheitsmoment**
	Eine Punktmasse im Abstand r um eine Drehachse.	$J = m \cdot r^2$
	Ein Zylindermantel, der um seine Symmetrieachse rotiert, für eine Wandstärke mit $Dicke \ll Radius\, r$.	$J = m \cdot r^2$
	Ein Vollzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
	Ein Hohlzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert. Schließt die vorgenannten Grenzfälle Zylindermantel und Vollzylinder mit ein.	$J = \frac{m}{2} \cdot (r_1^2 + r_2^2)$
	Ein Vollzylinder, der um eine Querachse (zweizählige Symmetrieachse) rotiert. (l *ist die Länge*)	$J = \frac{1}{4} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$
	Ein Zylindermantel, der um eine Querachse (zweizählige Symmetrieachse) rotiert.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$
	Ein dünner Stab, der um eine Querachse (zweizählige Symmetrieachse) rotiert. Diese Formel ist eine Näherung für einen Zylinder mit $r \ll l$.	$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
	Dünner Stab, der um eine Querachse durch ein Ende rotiert. Diese Formel ist die Anwendung der Steiner-Regel auf den dünnen Stab.	$J = \frac{1}{3} m \cdot l^2$
	Eine Kugelschale, die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert, für eine Wandstärke $d \ll r$.	$J = \frac{2}{3} m \cdot r^2$
	Eine massive Kugel, die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert.	$J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$
	Ein Quader, der um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert, die parallel zu seinen Kanten c liegt. a und b sind jeweils die Abmaße senkrecht zur Drehachse.	$J = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$

	Ein massiver Kegel, der um seine Achse rotiert.	$J=\frac{3}{10}m\cdot r^2$
	Ein Kegelmantel, der um seine Achse rotiert. Die Gleichheit mit dem Trägheitsmoment eines Vollzylinders kann man sich so vorstellen, dass man jeden Kegelmantel zu einer Kreisscheibe "plattdrücken" kann, ohne sein Trägheitsmoment zu verändern.	$J=\frac{1}{2}m\cdot r^2$
	Ein massiver Kegelstumpf, der um seine Achse rotiert.	$J=\frac{3}{10}m\cdot\frac{r_1^5-r_2^5}{r_1^3-r_2^3}$
	Eine vierseitige, regelmäßige Pyramide, die um ihre Symmetrieachse rotiert. r ist die halbe Länge der Diagonale der Grundfläche und l ist eine Seitenlänge der quadratischen Grundfläche.	$J=\frac{1}{5}m\,r^2=\frac{1}{10}m\,l^2$
	Volltorus mit dem Radius R und der halben Dicke r der um die Symmetrieachse rotiert. (Der Radius R ist so gemeint, dass der Außenradius des Torus R+r ergibt)	$J=m\left(\frac{3}{4}r^2+R^2\right)$

Das Trägheitsmoment ist additiv!

Das heißt, man kann bei einem zusammengesetzen Körper die Trägheitsmomente der Einzelteile addieren und auch subtrahieren. Das Trägeitsmoment eines beliebigen Körpers eines beliebigen Körpers kann man berechnen, wenn man diesen Körper in Punktmassen aufteilt und die Trägheitsmomente dieser Punktmassen addiert: $J=\sum_i m_i r_i^2$. Mathematisch geschieht dies mit Hilfe eines Integrals: $\boxed{J=\int r^2\,dm}$

Dabei bezeichnet r den senkrechten Abstand eines Massenelementes dm von der Drehachse.

Als Beispiel für die Additivität sei hier das Trägheitsmoment eines Rohres der Wandstärke $d=r_a-r_i$ durchgerechnet. Über eine mathematische Umformung erhält man aus der Gleichung für das Trägheitsmoment des Rohres die Differenz der Trägheitsmomente zweier Vollzylinder:

Für die Masse eines Hohlzylinders gilt: $m_{hohl}=V\cdot\varrho=(\pi\,r_a^2\cdot l-\pi\,r_i^2\cdot l)\cdot\varrho=\pi\cdot l\cdot\varrho\left(r_a^2-r_i^2\right)$

damit ist $J_{hohl}=\frac{1}{2}m_{hohl}\left(r_a^2+r_i^2\right)=\frac{1}{2}\pi\cdot l\cdot\varrho\left(r_a^2-r_i^2\right)\cdot\left(r_a^2+r_i^2\right)=\frac{1}{2}\pi\cdot l\cdot\varrho\left(r_a^4-r_i^4\right)=$

$$=\frac{1}{2}\pi\,r_a^2\cdot l\cdot\varrho\,r_a^2-\frac{1}{2}\pi\,r_i^2\cdot l\cdot\varrho\,r_i^2=\frac{1}{2}m_{voll.a}\cdot r_a^2-\frac{1}{2}m_{voll.i}\cdot r_i^2=J_{voll.a}-J_{voll.i}$$